研究会報告

# ランダム媒質中の破壊モデル

東北大工基礎　原 啓明

岩石[1)]やコンクリート[2)]は鑛物粒子の複雑な複合体である。これ等は脆性材料とみられ，小さな変形で破壊する。　金属，岩石，コンクリート，ガラスなどの破壊現象は，複雑な系の応答特性が直接現れる点で興味深い。　最近，破壊のパターンはフラクタル幾何学の面から興味を集めている[3),4)]。

本報告では，岩石やコンクリートを複合体系とみるモデルを提案した。モデル体系に外力を加え，媒質中に発生したクラックのサイズ分布による破壊過程を調べた。図1はモデルの破壊過程の概念図を示す。

本報告の定式化は時間に関する不変量に着目し，基本方程式を導出した点で文献 3 と異なる。

体系は多数のクラスター群 $\{E\}$ から構成された複合系である。方向 $i$ のマイクロクラック $(m.c.)$が　時刻 $t$ でクラスター$(E)$内に分布しており，その長さの上限は $L_i(E,t)$である。　また，クラスター$(E)$を体積 $L_i(E,t)^3$の立方体で分解すると，$G_i(L(E,t))$個のサブセグメントが得られるものとする。

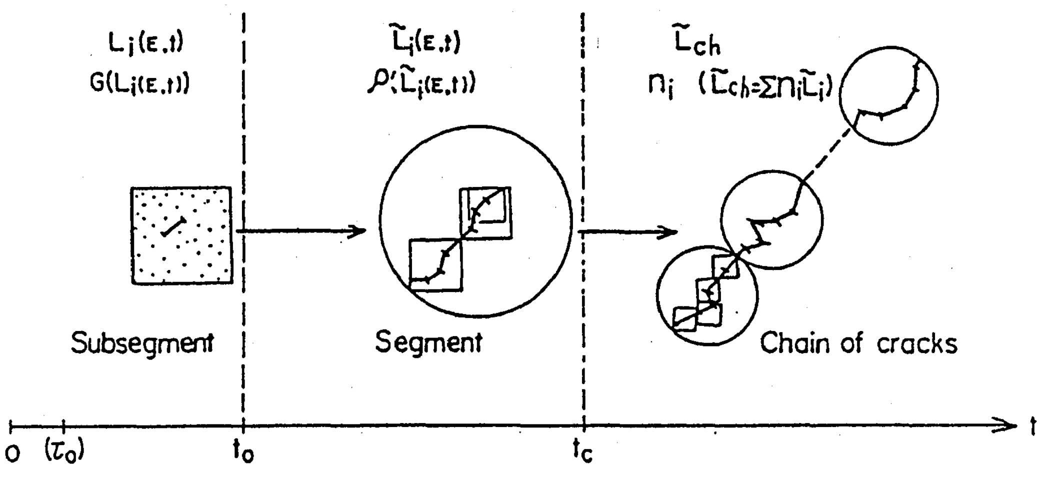


図　1

(I) 初期過程$(0\leq t<t_0)$

初期過程の上限 $t_0$ は $<L_i((E,0))>_{iG}$ をマイクロクラック$(m.c.)$の速度 $v$ で割った時間である。　$<A>_{iG}$ は 方向 $i$ と，個数 $G(L_i(E,0))$に関する平均量されたものであることを示す。クラスターのサイズを不変量と見ると，$G$ に関する時間発展方

程式が導出される。 図1参照。

(II) スケーリング過程( $t_0 \leqq t < t_c$ )

スケーリング過程の上限 $t_c$ は $\Omega(E)^{1/3}/v$ [$\Omega(E)$:クラスターの体積]で与えらえる。 この過程では，マイクロクラック($m.c.$)は他のマイクロクラック($m.c.$)と連結し，$L_i(E,t)$ は不連続的に増加する。 連結による増加の割合を $\lambda_i(E)$ で表わすと連結したマイクロクラック($con.m.c$) の長さは，

$$\tilde{L}_i(E,t) = \lambda_i(E)L_i(E,t-t_0) \quad (\lambda_i \gg 1) \tag{1}$$

で与えられる。 この過程では，$\tilde{L}_i(E,t)$ を変数とする $G$ の時間発展方程式が得られる。図1の $\rho(\tilde{L}_i(E,t))$ は $G(\tilde{L}_i(E,t))$ に比例する関数 である。

以上のモデル過程 ($I$),($II$) では，初期値を与えれば，各過程の基本方程式の解は $L_i(E,0)$と$\tilde{L}_i(E,t_0)$を使って表現される。
以下では，″ モデル体系が一様なランダム媒質である" として，初期値 $L_i(E,0)$はクラスター($E$)には無関係で，$L_i(E,t)$の増加率は 方向 $i$ に依らないとこと， つまり，

$$L_i(E,t) = L_i e^{\Gamma t} \tag{2}$$

を仮定する。 $\Gamma \equiv \sigma_0/m$ ，$\sigma_0$ は一様な応力，$m$ はマイクロクラック($m.c.$)の形態を考えたフラクタル次元である。
また，初期値で決まる $A_i(E,m)$，$\tilde{A}_i(E,m)$ [ スケールされた初期条件 ]は方向 $i$ には依らないと仮定する。

(III) 最終過程 ( $t > t_c$ )

$t > t_c$ になると， クラスターは成長し破壊される。 この状態をクラック($E$) が発生したと見る。 一般に $t > t_c$ では，破壊されたいくつかのクラック($E$)が連結し，長さ $L_i(c)$ の連結されたクラック($con.c.$) が形成される。
連結されたクラック($con.c.$)の発生確率 $P(L_i(c))$ と，$k$ 個の連結されたクラック($con.c.$)の分布パターン $\{n_i\}$ を表す確率関数 $W(n_1,n_2,...,n_k;N)$を導入する。
これにより，最終過程の $W$ ($N=t/t_c$)の時間発展は

$$W(n_1, n_2, ..., n_k; N) = \sum_{i=1}^{k} P(L_i(c)) W(n_1, n_2, ..n_i-1, n_i+1, ..., n_k; N-1)$$

$$\left( \sum_{i=1}^{k} P(L_i(c)) = 1 \right) \tag{3}$$

で規定される。 ここで，連結されたクラックの組み合わせ $\{n_i\}$ ( $\sum_{i=1}^{k} n_i = M_{ch}$ )で構成されたクラックの鎖(c.chain)を考え，総数 $M_{ch}$， 長さ $\tilde{L}_{ch}$ ( $= \sum n_i L_i(c)$ )を拘束条件とする。

$\tilde{L}_{ch}$ が，体系のサイズ $L_V[=V^{1/3}$, $V$:体系の体積 $]$ に等しい場合，(3)で示した時間発展方程式は，疲労破壊やクリープ破壊において発生したクラックが伝搬し，つづいて破壊にいたる過程であるとみることもできる[5]。

初期条件 $W(0,0,..)=1$ の解に含まれる $n_i$ を変分関数として，拘束条件のもとで，$S=k \log W$ ( $k$:定数) を最大にする。 $N$ $(=t/t_c) \to \infty$ として，$n_i$ を求めると，$n_i$ と $L_i(c)$の関係はサイズ頻度分布として

$$n_i = e^{c_0} L_i(c)^{-m} e^{-\beta L_i(c)} \tag{4}$$

で与えられる。 ここで，$e^{c_0} \equiv e^{\gamma} / \sum_i L_i(c)^{-m}$ ，$\beta$ と $\gamma$ は拘束条件に対する未定係数である。

この結果は $n_i$ のべき則がシステムのサイズ効果によって指数的振る舞いで修正されことを示している。 実際，松脂を使ったクラックの発生実験[6]においてこの効果を認めることができる。

## 文献


1) 山口梅太郎，西松裕一：岩石力学入門，東大出版，1991
2) S.Niiseki: Doctor Thesis (1991).
3) H.Hara and S.Okayama: Phys.Rev. 37, 9504,(1988)
4) H.J.Hermann: in Fractals and Disordered Systems (ed.A.Bunde and S. Halvin),1991 Springer
5) 横堀武夫：材料強度学，岩波，1981
6) K.Mogi:Bull.Earthq.Inst.40,831 (1962)